enplenitud.com

para jóvenes de cualquier edad...

Espacio Geográfico

Ana María Pereira

La geografía, desde sus principios ha estado relacionada de manera muy íntima con las matemáticas. Ambas han crecido de manera tan espectacular, que parecerían haberse alejado sin posibilidad de reconocerse mutuamente. Sin embargo, la geometría, que resultó del fruto de esta unión, ha retroalimentado a estas dos ciencias mediante una relación simbiótica, dejando beneficios mutuos. La pregunta básica que se plantea es si realmente la geometría tradicional que se ha desarrollado durante estos últimos tres mil años alcanza para describir de manera apropiada el espacio geográfico. Aunque es innegable el éxito de la geometría tradicional en esta descripción, en el presente trabajo se usará esta pregunta como pretexto para introducir una nueva geometría –llamada fractal - y explorar sus aplicaciones dentro de la geografía. Para entrar en la cuestión de si realmente se necesita una nueva geometría, haremos unas reflexiones muy generales acerca del desarrollo histórico de la relación geometría-geografía.

Las primeras noticias que se tienen de esta relación provienen del antiguo Egipto, donde se desarrolló la geometría, que mide la tierra en términos de algún patrón de longitud y área. Esta se desarrolló de la necesidad práctica de cuantificar la cantidad de terreno, bien sea para cobrar impuestos, medir la productividad o delimitar las tierras. Durante esta época se empezaron a conocer algunas propiedades básicas de las figuras geométricas más simples, tales como triángulos, cuadrados, pirámides, etc. El desarrollo de la geometría, inmediatamente tuvo repercusiones en otros ámbitos, tales como en la arquitectura o la escultura, donde sus métodos resultaron muy útiles para diseñar y planificar [Harigatti].

Posteriormente, fueron los griegos quienes realizaron el paso fundamental de la abstracción de la geometría [Zhmud], es decir, se dieron cuenta que ésta podía construirse sin hacer referencia a objetos reales, de tal modo que una figura geométrica como el triangulo tenía una existencia propia, y que dada esta generalidad, podía usarse para representar muchas cosas diferentes (un terreno triangular, una escuadra, la esquina en un edificio, un problema de navegación celeste, etc.). Partiendo de unos pocos axiomas geométricos, que constituyen proposiciones básicas evidentes que no pueden demostrarse, los griegos fueron capaces de deducir –mediante la lógica- nuevas proposiciones, llamadas teoremas. El éxito de los métodos inductivos y deductivos de los griegos fue tal, que finalmente les llevó a pensar que la realidad debía ajustarse a sus modelos geométricos y numéricos, y no al revés (aunque aún hoy, muchas veces seguimos cometiendo el mismo error). Así, los griegos pensaban en un modelo del universo donde cada elemento, a saber: la tierra, el mar, el fuego, el viento, el sol y las estrellas, estaban situados cada uno sobre los cinco sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro) [Chossat]. Es aquí donde la geometría se empieza a convertir en una rama de la matemática, desarrollándose de manera independiente de la geografía. En el renacimiento nace la geometría descriptiva, y Descartes combina la geometría con el álgebra produciendo la geometría analítica.

Mas tarde se combina el cálculo y se obtiene la geometría diferencial (que tiene hoy día un papel relevante en la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica relativista). Recientemente, la topología ha sido una de las ramas con mayor auge dentro de la matemática. Este desarrollo espectacular de la geometría abstracta de alguna manera la separó de sus orígenes geográficos. Sin embargo, en 1979 ocurrió un hecho sin precedentes que volvió a hermanar a ambas ciencias. Durante todo el siglo XX se había estado tratando de demostrar la conjetura del mapa de cuatro colores, la cual proponía que todo mapa puede colorearse usando sólo cuatro colores, de modo que ningún país con frontera común tuvieran el mismo color (aquí deben ponerse como excepción que no existan puntos fronterizos donde se junten cuatro países. El mapa de los estados de los Estados Unidos de Norteamérica no puede colorearse con cuatro colores, debido a que existe un lugar llamado “four corners”, donde la frontera de Utah, Nuevo México, Arizona y Nevada se tocan). La demostración de esta conjetura había sido elusiva, sin embargo, en 1979 pudo ser demostrada utilizando computadoras, siendo esta la primera vez que se realiza un demostración formal mediante la cibernética. Esto acarreó diversos problemas filosóficos [Lorenzo], tales como si la demostración es válida o si los programas eran correctos. Pero dejando a un lado estas discusiones, la demostración de la conjetura representa un hito dentro de la matemática y no deja de ser sorprendente que tal paso fundamental se dio cuando la geometría regresó a sus orígenes para demostrar un problema que parece tan sencillo en apariencia.

Aún tomando en cuenta todos estos éxitos de la geometría, la pregunta básica que surge al mirar la forma de las islas, montañas y el curso serpenteante de un río, es si realmente estos objetos pueden describirse mediante figuras geométricas simples como triángulos o cuadrados. En principio, la geometría usual si describe parte de esta realidad; los mapas son un ejemplo claro de ello, ya que los levantamientos topográficos a base de líneas y triángulos permiten describir el espacio geográfico. Sin embargo, estos son modelos en los cuales se pierden muchos detalles en aras de una descripción general, y aún así, no podríamos usar una simple figura geométrica para modelar la compleja forma del Cañón del Colorado.

Geometría fractal

Al intentar modelar formas naturales, como una línea costera, las figuras geométricas simples no son un buen modelo; parecería ser como si una cualidad fundamental pasara desapercibida ante la geometría tradicional. Para intentar descubrir la cualidad faltante, formulemos la siguiente pregunta, ¿cuál es la longitud de una costa? A modo de ejemplo, calculemos la longitud de la Baja California, entre la ciudad de Tijuana y la Bufadora. Para contestar esto, lo primero es conseguir un mapa de la costa a cierta escala, y después, con una regla de cierta medida, contamos cuantas veces cabe nuestra regla en la costa, tal como puede observarse en la Fig. 1 A).

La longitud de la costa (que llamaremos L) será el número de segmentos contados multiplicada por la escala de la regla en kilómetros,

L= (escala) (# de veces que cabe la regla)

Por ejemplo, en la Fig. 1 se muestra el procedimiento. Si la escala de la regla es 16 Km., se obtienen seis pedazos, de donde L=96 Km. Sin embargo, al observar el mapa, queda claro que muchos detalles no pueden medirse en esta escala tan grande, ya que su tamaño es menor a la regla utilizada.

Fig. 1. Medición de la longitud de la costa de Baja California entre Tijuana y la Bufadora, utilizando una regla de: A) 16 Km. y B) 8 Km.

Podemos utilizar una regla más pequeña para medir los detalles, por ejemplo, una regla de 8 Km., y entonces el conteo de los cuadrados es de 15 pedazos, siendo L=120 Km., tal como se muestra en la Fig. 1 B).
Como puede verse, la longitud de la costa es mayor que lo medido con otra regla. Puede repetirse este procedimiento usando reglas mas pequeñas cada vez, observándose que la longitud de la costa crece a medida que la regla se hace más pequeña. La razón de ello es evidente, a medida que medimos con mayor precisión, pueden verse más detalles de la costa, por lo cual la longitud crece. Así, la longitud de una costa depende de la escala en la cual se mida. La forma de esta dependencia puede obtenerse inmediatamente si graficamos, tal y como se muestra en la Fig. 3 para diferentes costas y fronteras, el logaritmo en base diez de L (que

puede pensarse como el número de ceros de la longitud) contra el logaritmo del tamaño de la regla usada, como se muestra en la Fig. 2.

Esta gráfica fue obtenida por primera vez en 1960 por Fry Richardson, para diferentes costas. Puede observarse que todas son líneas rectas caracterizadas por diferentes pendientes, cuyo valor denotaremos por -D y ordenadas al origen que llamaremos Log10(L0). Las ecuaciones de estas rectas son del tipo,

Log10 (L)=-D Log10 (escala)+Log10 (L0)

Exponenciando ambas lados de la ecuación, obtenemos la dependencia de la longitud de la costa en términos de la escala,

L=L0 (escala)-D

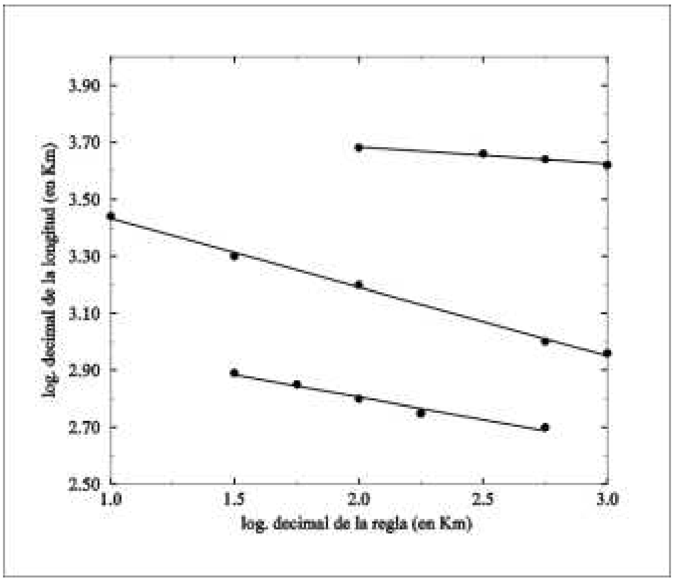

Fig. 2. Logaritmo de las longitudes aproximadas de diversas costas y fronteras en función del logaritmo de la escala. La línea de arriba es la costa de África del Sur; la línea de en medio es la costa de la Gran Bretaña, y la línea inferior es la frontera terrestre entre España y Portugal.

El exponente D caracteriza la rugosidad de la costa, como puede verse en la comparación de la Fig. 2 para diferentes tipos de costas. Nótese que su valor es cercano a 1.5 para costas muy rugosas, mientras que tiende a uno para costas poco accidentadas. Así, el parámetro D describe una característica de la costa, su rugosidad.
Repitamos el mismo procedimiento para medir una costa totalmente recta de tamaño L. Si escogemos reglas de tamaños L/n donde n es un número entero, entonces el número de veces que cabe la regla de escala L/n en L es simplemente n. Esto puede entenderse fácilmente en la Fig. 3, donde una recta se parte en cuatro pedazos. La longitud de la recta esta dada por,

Longitud (escala)(# de pedazos)=(L/n)n=L

de donde obtenemos que,

De pedazos=L(escala)-1

Es importante notar que la recta de tamaño L/4 es en realidad una versión re-escalada de la recta de longitud L. La importancia de este hecho quedará de manifiesto posteriormente.

El mismo procedimiento puede repetirse para medir el área de un cuadrado con lados de tamaño L. En el ejemplo de la Fig. 3. En este caso, si medimos el área contando cuantos cuadrados de lado (L/n) caben en el cuadrado grande, es claro que ahora caben n2, entonces se tiene que,

(# de pedazos)=n2=L2(L/n)2

de donde,

(# de pedazos)=L2 (escala)-2

De lo anterior, es claro que la longitud de una recta tiene una D=1, mientras que un cuadrado tiene D=2. Ahora recordamos que la recta es una figura geométrica unidimensional, siendo el cuadrado una figura en dos dimensiones.

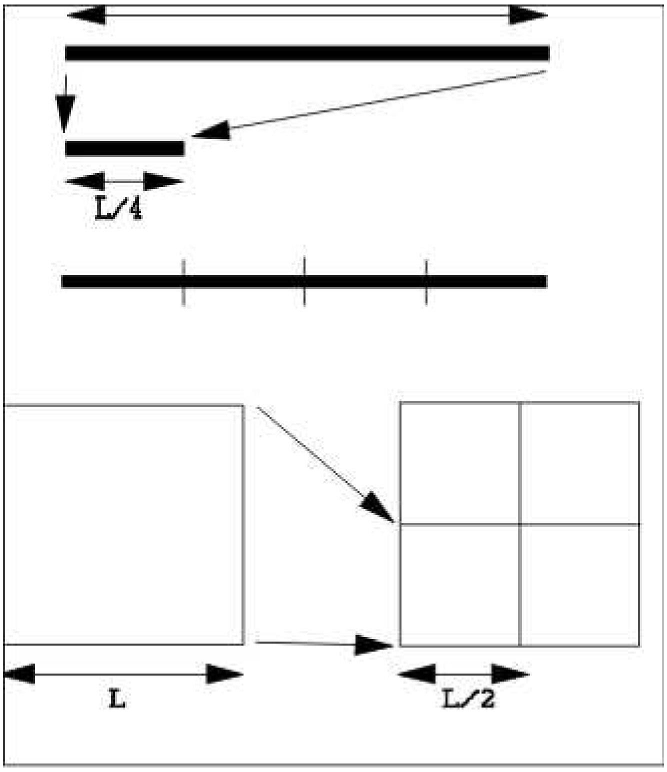

Fig. 3. Obtención de la longitud de una recta y el área de un cuadrado mediante un escalamiento de la misma recta o cuadrado. Notar la autosemejanza.

Siguiendo esta idea, el matemático francés Benoit Mandelbrot, quien estaba estudiando los errores de transmisión que se producen en una línea telefónica, propuso identificar a D con la dimensión de los objetos. Esta dimensión no es igual a la dimensión del espacio donde se sitúa la figura. El número D puede ahora ser un número fraccionario por lo cual se le llamó dimensión fractal. Así, una figura con dimensión fractal $D=1.3$ es una curva irregular, ya que tiene una dimensión entre una recta y un plano. Si la curva tiene dimensión $D=2$, sería tan irregular que alcanzaría a cubrir de manera uniforme el plano, mientras que una curva con dimensión fractal 1 es una recta. Análogamente podemos construir un objeto con dimensión fractal entre cero y uno, es decir, con una dimensión intermedia entre un punto y una recta. Para ello consideramos un intervalo de longitud 1, y lo dividimos en tres pedazos, según se muestra en la Fig. 4. Quitamos el pedazo central. Ahora sólo quedan dos pedazos de longitud $1/3$. Cada uno de estos pedazos se puede volver a subdividir quitando el pedazo central de cada segmento, como se muestra en la Fig. 4. Si se repite el procedimiento infinitas veces, se obtendrá un polvo muy fino, invisible para el ojo. Este polvo es conocido como conjunto de Cantor. Su dimensión fractal es 0.63.

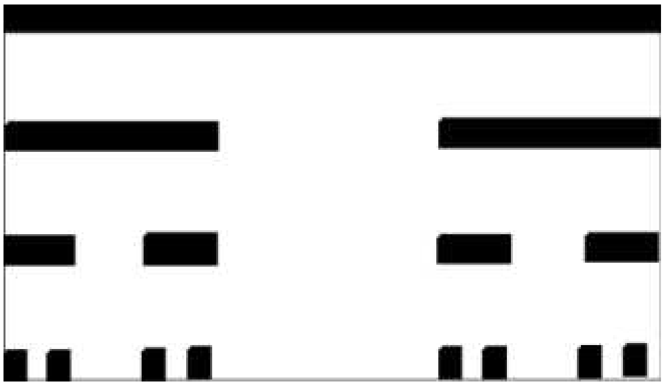

Fig. 4. Construcción de un conjunto de Cantor. Para ello se parte una recta en tres pedazos iguales, y se quita el pedazo central. El proceso de subdivisión se repite sucesivamente. Nótese la tendencia de los segmentos hacia la formación de grupos o ráfagas. Este es el efecto “Josué”, que intuitivamente relacionamos con las “rachas” de buen tiempo, economía, accidentes aéreos, etc. Un fractal aleatorio se construye desordenado los intervalos en blanco, pero sin alterar sus longitudes.

La contribución de Mandelbrot fue más allá de interpretar al número D como una dimensión fraccionaria. Lo importante de este número es que pone de manifiesto una clase de simetría que había permanecido desapercibida para los matemáticos, aunque jamás para los artistas. Esta simetría consiste en que muchos objetos son similares a sí mismos aunque cambiemos la escala con la cual los miremos.

Un árbol es el ejemplo cotidiano más sencillo que podamos imaginar. Su tronco se subdivide en ramas más pequeñas, y cada rama en otra rama y así sucesivamente. Sin embargo, si amplificamos suficientemente una sola rama junto con sus ramas más pequeñas, su aspecto general será la del mismo árbol. Así, podríamos decir que las partes del todo están formadas por versiones más pequeñas del todo. He aquí justamente la propiedad que se escapaba de la costa. En una escala pequeña, la costa tiene una forma muy similar a la costa en un mapa con una escala mayor. Esta propiedad se conoce como autosimilaridad u homotecia interna, y es la característica primordial de los fractales. Bajo este enfoque, la recta pequeña de la Fig. 3, es sólo una versión escalada por el factor ¼ de la recta original. Algo parecido sucede con los cuadrados que se forman al subdividir el cuadrado grande de la Fig. 3; al cambiar la escala de un cuadrado a la mitad, el todo se obtiene de sus partes utilizando cuatro cuadrados reescalados, y por eso la dimensión fractal es dos. Una vez entendida esta propiedad, se puede utilizar la geometría fractal para construir modelos más realistas de costas, como por ejemplo la isla de Koch (Fig. 4), formada mediante un mecanismo de subdivisión análogo al del polvo de Cantor. Aunque este modelo todavía es muy sencillo, en la siguiente sección se explicará como formar modelos más realistas y se hablarán de diversas aplicaciones de los fractales en la geografía.

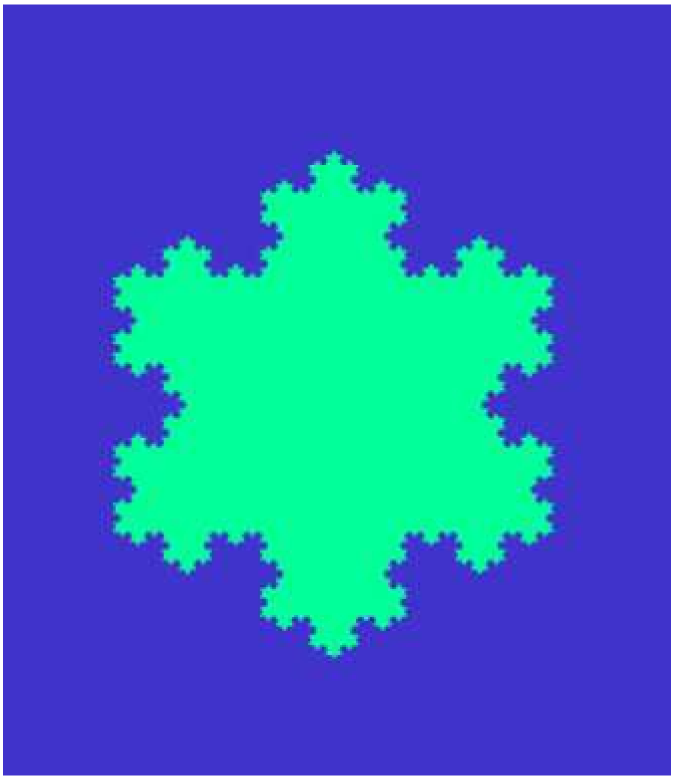

Fig. 5. Isla de Koch, cuya costa tiene una dimensión fractal D=1.26. Se construye subdividiendo un triángulo de manera recursiva.

Aplicaciones

La propiedad de autosimilaridad que captura la geometría fractal ha dado lugar a un número importante de aplicaciones, y que ha sido desarrollada ampliamente durante las dos décadas finales del siglo XX. En la física esta repercusión ha sido enorme, porque su desarrollo coincidió con el descubrimiento de la teoría del caos y sistemas no-lineales.

La geometría fractal resulto ser el lenguaje natural de teorías que permiten explicar diversos fenómenos, tales como la no-predictibilidad del clima a largo plazo, la estabilidad de los anillos de Saturno, la turbulencia de los fluidos, las transiciones de fase entre líquido-sólido y gas-líquido, etc. Otras disciplinas como la teoría de la información, del lenguaje, la biología, la química y aún la música y la pintura, se han visto afectadas por esta nueva visión geométrica. En este trabajo no nos alcanzaría el espacio para hacer justicia a todas las aplicaciones, sin embargo, mencionaremos algunas de las más relevantes.

En primer lugar, diremos que no sólo las costas presentan esta propiedad de autosimilaridad característica de los fractales. Por ejemplo, en 1982 Lovejoy [Lovejoy] , utilizando datos de radar y satélite, encontró que la relación entre el área y el perímetro de las nubes de 1.33. Posteriormente, Rys y Waldvogel [Rys] encontraron que las nubes de tormenta son aún más irregulares, con una dimensión D=1.36. De modo análogo puede medirse la dimensión fractal de las cadenas montañosas, o bien proceder a la inversa, es decir, construir paisajes con montañas generadas partiendo de algoritmos fractales [Mandelbrot].

Debe decirse que los algoritmos fractales para generar texturas en los paisajes generados por computadora son una práctica común porque ahorran espacio de memoria y tiempo de cómputo. Aún más, existen métodos de codificación fractal para comprimir imágenes, que resultan convenientes para cierto tipo de imágenes. Otro aplicación muy interesante, aparece en este volumen donde J.F. Parrot y H. Taud analizan la

evolución del espacio urbano mediante la geometría fractal [Taud].
La geometría fractal no sólo permite analizar la forma de objetos, sino que puede ir mas allá, analizando fenómenos geográficos que transcurren el tiempo. Mandelbrot analizó la recurrencia de las crecidas del río Nilo; si en un año ocurría una crecida mayor a cierta norma, ese año se marcaba con un uno, y con cero en caso contrario. Los resultados obtenidos, le indicaron que las crecidas ocurrían a ráfagas, es decir, si en un año ocurría una crecida, era más probable que en el siguiente año ocurriera otra (a este fenómeno se le llamó "efecto Josué", en alusión a la historia bíblica). Esto se debe a que la cantidad de crecidas sigue un patrón fractal. De hecho, este resultado era similar a sus resultados sobre errores en una línea telefónica, y su gráfico de unos y ceros es muy similar al del polvo de Cantor. Usando el mismo método de contar a diferentes escalas, Mandelbrot encontró que las crecidas en el río Nilo siguen un patrón con dimensión fractal $D=0.9$, mientras que el Rhin tiene $D= 0.5$ y el Loira $D=0.5$ [Mandelbrot 1975].

A pesar de todo lo dicho anteriormente, es difícil pensar que el polvo de Cantor pueda ser un modelo realista de crecidas de ríos, o la isla de Koch una isla real. Ambos son objetos fractales muy regulares. Por esta razón, para construir modelos más realistas se necesita introducir algo de desorden aleatorio. A modo de ejemplo, podemos desordenar los puntos del conjunto de Cantor, pero con la condición de que las distancias entre los puntos del conjunto sigan teniendo la misma distribución (es decir, en un paso dado de la construcción del Polvo de Cantor, tómense todos los segmentos de recta, e intercálense al azar). Es claro que el conjunto resultante seguirá siendo autosimilar, aunque se verá mucho más desordenado. Por esta razón, los modelos realistas necesitan introducir el azar, pero respetando la autosimilaridad propias de los fractales. Tomando en cuenta estos dos elementos, pueden construirse modelos muy realistas de costas y procesos en el tiempo.

No sobra decir que otros procesos en el tiempo, como las fluctuaciones de las acciones en la bolsa de valores, siguen un patrón fractal similar al observado en las crecidas de los ríos [Mandelbrot 1975].

Otra aplicación donde los fractales resultan ser de gran importancia es en las llamadas redes de distribución. No es casualidad que la estructura del sistema sanguíneo de los animales, vascular de los árboles, la red Internet, la red de distribución de agua, electricidad, gas y la manera en la cual los ríos drenan un territorio tengan una estructura en ramificaciones similares a la de un árbol [Strogatz]. De hecho, la dimensión fractal está relacionada directamente con las necesidades de transporte, y por ello, se puede estimar la altura de una cadena montañosa calculando la dimensión fractal de la red fluvial que la drena [Banavar].

Los cambios de escala que estudia la geometría fractal, ha dado lugar al estudio de las relaciones alo métricas, es decir, cómo se escalan unas cantidades respecto a otras. A modo de ejemplo citemos que el metabolismo de los animales por kilogramo de peso (es decir, el consumo de energía por kilo corporal) no es lineal; los animales grandes gastan en proporción menos energía que los pequeños. Si no fuera así, y un elefante comiera proporcionalmente a su peso lo mismo que un ratón, entonces acabaría con sus recursos de manera inmediata. De hecho, el metabolismo respecto al peso corporal sigue la ley,

$$\text{Metabolismo} \, (\text{Peso})^{3/4}$$

que nos recuerda la fórmula para la longitud de la costa. Esta ley proviene de las leyes generales que gobiernan la dimensión de una red de distribución [Banavar].

Las ciudades de un país también siguen una relación similar, y de hecho, el movimiento de bienes y personas dentro de una ciudad es conocido como la "circulación", y aún hablamos de "arterias viales" [Jones]. Si clasificamos la importancia de las ciudades de acuerdo a su población, es decir, las ciudades de mas de diez millones tienen rango uno, las de uno a diez millones, rango dos, de cien mil a un millón rango tres, y así sucesivamente, entonces podremos hacer una gráfica del logaritmo del rango con respecto al logaritmo del número de ciudades que tienen ese rango en un país. Esta es una gráfica similar a la obtenida para la longitud de la costa, y se le conoce como regla de Zipf [Jones]. La razón es clara, sería difícil imaginar que hubiera muchas ciudades como la de México en el país, ya que acabarían con sus recursos de manera inmediata. Por necesidad, el número de megalópolis es menor que el número de pueblos, y no existe una proporción lineal entre ambos números. La ley de Zipf revela una relación de jerarquías a diversas escalas, característica de las redes fractales. La magnitud de los terremotos siguen una ley parecida, llamada de Herr, y tanto el lenguaje como la música siguen relaciones de Zipf. En este caso, la dimensión fractal se conoce como “el contenido de información” ya que existe una relación estrecha entre la teoría de la información, la termodinámica y las estructuras fractales.

Más allá de esta descripción mediante los fractales, esta universalidad nos conduce a buscar mecanismos que puedan explicar la ubicuidad de la autosimilaridad. Muchas de las respuestas provienen de las ecuaciones diferenciales no-lineales, procesos estocásticos y especialmente los llamados fenómenos colectivos y de auto-organización. La unión de estas ideas ha dado lugar a la llamada teoría de los sistemas complejos. Por ejemplo, diversas ecuaciones estocásticas generan costas cuya dimensión fractal es $D=1.5$, muy cercanas a las observadas en la realidad. También se obtienen fractales cuando se intenta optimizar alguna característica funcional, como la relación superficie/volumen o mínimas pérdidas de energía en las redes de distribución. Así, los fractales son la consecuencia del desorden que opera a diversas escalas, o de la optimización de alguna cantidad. Por ello, el estudio de la fractalidad puede conducir a una comprensión profunda de los fenómenos que la causan, y por lo tanto a modelos más realistas.

Conclusiones

En este texto se ha discutido la necesidad de utilizar la geometría fractal para describir de manera matemática un hecho fundamental del espacio-tiempo geográfico: la autosimilaridad o simetría de escalamiento. Esta simetría fundamental aparece en numerosos aspectos que revelan una universalidad en su carácter. La fractalidad observada en diversos sistemas, es consecuencia de muchos factores, pero en la actualidad recién estamos pasando de la etapa descriptiva a una de comprensión. Así, la geometría fractal junto con la teoría de sistemas complejos, promete continuar durante largo tiempo la siempre beneficiosa unión de las matemáticas con la geografía.

Bibliografía

[Banavar] Banavar J., Maritian A., Rinaldo A., 1999, Size and form in efficient transportation networks, Nature, 399, p. 130.

[Chossat] Chossat P., 1996, Les symétries brisées, Belin, Paris, p. 7.